МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЦИКЛОВАЯ КОМИССИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

по высшей математике

на тему:

Решение задач по линейной алгебре: матрицы, определители и системы линейных уравнений

Выполнил(а): студент 2 курса группы ИС-21 Кузнецов Дмитрий Андреевич
09.02.07 Информационные системы и программирование

Руководитель: преподаватель высшей категории Соловьёва Ирина Петровна

Брянск · 2026

ОБРАЗЕЦ

ВВЕДЕНИЕ

Линейная алгебра составляет теоретический фундамент значительной части прикладных математических дисциплин и служит инструментом формализации экономических, технических и информационных процессов. Настоящий документ представляет собой демонстрационный пример решения индивидуальных заданий по теме «Матрицы, определители и системы линейных уравнений» и предназначен для размещения в разделе «Примеры работ» сайта bryansk-diplom.ru. Актуальность работы определяется тем, что аппарат матриц и систем линейных уравнений широко применяется при моделировании балансовых соотношений, оптимизационных задач и обработке экспериментальных данных [2, с. 14].

Цель работы — закрепление практических навыков выполнения матричных операций, вычисления определителей и решения систем линейных уравнений различными методами. Для достижения цели поставлены следующие задачи: изучить теоретические основы линейной алгебры; выполнить индивидуальные задания по варианту; сопоставить результаты, полученные аналитически и средствами табличного процессора; сформулировать обоснованные выводы. Объектом исследования выступают условные матрицы и системы уравнений варианта, предметом — методы их решения [5, с. 22].

Структура документа включает введение, две главы, заключение и приложение. Первая глава посвящена теоретическим основам линейной алгебры, вторая — решению индивидуальных заданий. В приложении А приведён листинг расчётов в табличном процессоре, подтверждающий корректность полученных результатов. Все числовые данные и наименования организаций носят условный, демонстрационный характер.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1 Матрицы и операции над ними

Матрицей размера m×n называют прямоугольную таблицу чисел, содержащую m строк и n столбцов. Элемент матрицы обозначают a_ij, где i — номер строки, j — номер столбца. Матрицы являются основным объектом линейной алгебры и широко применяются при формализации экономических и инженерных расчётов [2, с. 14]. В учебной практике удобно различать квадратные, диагональные, единичные и нулевые матрицы, поскольку от типа матрицы зависит применимость тех или иных операций. Так, обратная матрица существует только для невырожденной квадратной матрицы, а произведения определены лишь при согласованности размеров сомножителей.

Над матрицами определены операции сложения, умножения на число и умножения матриц. Сложение и умножение на число выполняются поэлементно и требуют одинаковой размерности слагаемых. Умножение матриц подчиняется правилу «строка на столбец»: элемент c_ij произведения равен сумме произведений элементов i-й строки первого сомножителя на соответствующие элементы j-го столбца второго. Эта операция некоммутативна, то есть в общем случае AB ≠ BA, что необходимо учитывать при построении вычислительных алгоритмов [5, с. 22]. Транспонирование матрицы заключается в замене строк столбцами и часто используется при подготовке данных к расчётам.

$$c_ij = \Sigma(k=1..n)\ a_ik \cdot b_kj \qquad (1)$$

где a_ik — элементы i-й строки матрицы A размера m×n; b_kj — элементы j-го столбца матрицы B размера n×p; c_ij — элемент произведения C = A·B размера m×p

Для квадратных матриц вводится понятие обратной матрицы A^{-1}, удовлетворяющей условию $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E — единичная матрица. Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы отличен от нуля. На практике её находят методом присоединённой матрицы или методом Гаусса — Жордана. В табличном процессоре обращение реализуется встроенной функцией МОБР, что существенно сокращает трудоёмкость ручных вычислений и снижает вероятность арифметических ошибок [3, с. 41].

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot A^{*} \qquad (2)$$

где |A| — определитель матрицы A; A* — присоединённая матрица, составленная из алгебраических дополнений транспонированной матрицы

1.2 Определители и их свойства

Определителем квадратной матрицы n-го порядка называют число, вычисляемое по элементам матрицы и характеризующее её вырожденность. Для матрицы второго порядка определитель равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей. Для матриц третьего порядка применяют правило треугольника или разложение по строке (столбцу). Определитель является ключевым инструментом исследования систем линейных уравнений, поскольку его отличие от нуля гарантирует единственность решения [1, с. 58].

$$|A| = a11 \cdot a22 - a12 \cdot a21 \tag{3}$$

где a11, a12, a21, a22 — элементы квадратной матрицы второго порядка

Определители обладают рядом свойств, упрощающих вычисления: при перестановке двух строк знак определителя меняется на противоположный; определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю; умножение строки на число равносильно умножению всего определителя на это число; прибавление к одной строке другой, умноженной на число, не изменяет определителя. Последнее свойство лежит в основе метода приведения матрицы к треугольному виду, при котором определитель равен произведению диагональных элементов. Соблюдение этих правил позволяет сократить объём вычислений при работе с матрицами высоких порядков [2, с. 63].

$$|A| = a11 \cdot A11 + a12 \cdot A12 + \ldots + a1n \cdot A1n \tag{4}$$

где A1j — алгебраические дополнения элементов первой строки; n — порядок матрицы

Алгебраическое дополнение A_ij связано с минором M_ij соотношением, учитывающим знак позиции элемента. Разложение по любой строке или столбцу даёт одно и то же значение определителя, что подтверждает корректность вычислительной процедуры. На этом свойстве построен рекурсивный алгоритм вычисления определителей произвольного порядка, реализуемый в электронных таблицах функцией МОПРЕД [3, с. 47].

$$A_ij = (-1)^{(i+j)} \cdot M_ij \tag{5}$$

где M_ij — минор, полученный вычёркиванием i-й строки и j-го столбца; (−1)^(i+j) — знаковый множитель

Таблица 1.1 – Свойства определителей и их влияние на вычисления

Свойство	Формулировка	Практическое значение
Перестановка строк	Знак определителя меняется на противоположный	Контроль порядка строк при приведении к треугольному виду
Равенство строк	Определитель равен нулю	Быстрая проверка вырожденности матрицы
Умножение строки на число	Определитель умножается на это число	Вынесение общего множителя за знак определителя
Прибавление кратной строки	Определитель не изменяется	Обнуление элементов ниже главной диагонали
Разложение по строке	Сумма произведений элементов на алгебраические дополнения	Рекурсивное вычисление определителей n-го порядка

Источник: составлено автором по [1, с. 58–66; 2, с. 63–70]

1.3 Системы линейных уравнений и методы их решения

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) содержит m уравнений с n неизвестными и в матричной форме записывается как A·X = B, где A — матрица коэффициентов, X — вектор неизвестных, B — вектор свободных членов. Система совместна, если она имеет хотя бы одно решение, и определённа, если решение единственно. Критерием совместности служит теорема Кронекера — Капелли: система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы [4, с. 37]. Для квадратной невырожденной системы решение единственно и может быть найдено несколькими методами.

$$A \cdot X = B \tag{6}$$

где A — матрица коэффициентов размера m×n; X — вектор-столбец неизвестных; B — вектор-столбец свободных членов

Метод Крамера применим к системам, у которых число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы отличен от нуля. Каждая неизвестная вычисляется как отношение определителя матрицы, полученной заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов, к главному

определителю системы. Метод нагляден, но требует вычисления n+1 определителя, что при больших размерностях становится трудоёмким [5, с. 88]. Матричный метод основан на умножении обеих частей уравнения на обратную матрицу и даёт решение в виде X = A⁻¹·B.

$$x_i = \Delta_i / \Delta \tag{7}$$

где Δ — главный определитель системы; Δ_i — определитель, полученный заменой i-го столбца столбцом свободных членов

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{8}$$

где A^{-1} — обратная матрица коэффициентов; B — вектор свободных членов

Универсальным является метод Гаусса, основанный на приведении расширенной матрицы к ступенчатому виду путём элементарных преобразований строк. Метод применим к любым системам, включая неопределённые, и позволяет одновременно установить совместность и найти общее решение. Прямой ход метода исключает неизвестные последовательно, обратный ход — находит их значения снизу вверх [4, с. 44]. В табличном процессоре метод реализуется через функции МОБР и МУМНОЖ, а также посредством надстройки «Поиск решения».

$$rang(A) = rang(A|B) \tag{9}$$

где A — матрица коэффициентов; (A|B) — расширенная матрица; rang — ранг матрицы (условие совместности по Кронекеру — Капелли)

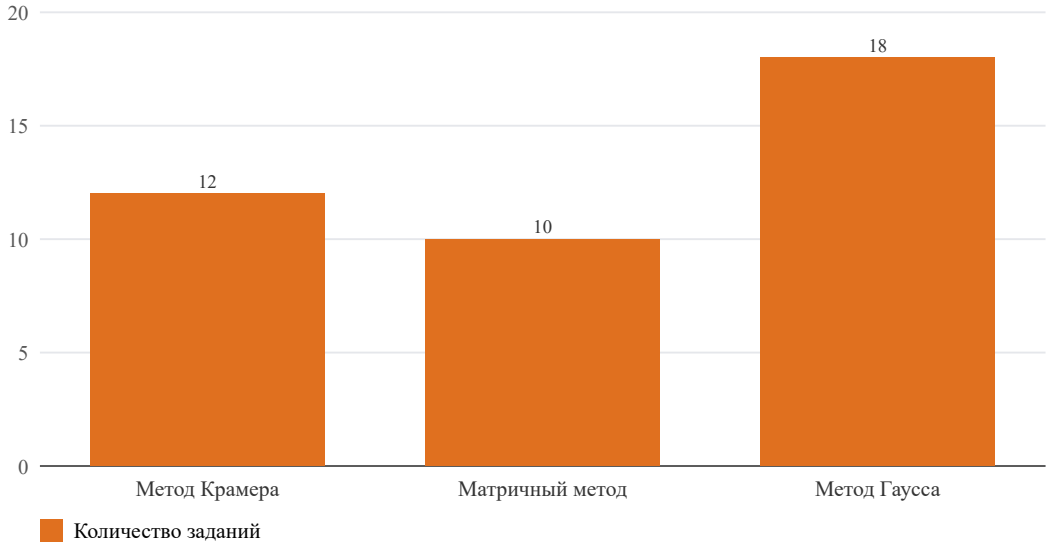


Рисунок 1.1 – Распределение учебных заданий по методам решения СЛАУ

Сравнение методов показывает, что метод Гаусса обладает наибольшей универсальностью и вычислительной устойчивостью, тогда как метод Крамера и матричный метод удобны для компактных систем и учебной проверки результатов. Комплексное применение нескольких методов позволяет верифицировать полученное решение и исключить ошибки округления. Именно такой подход реализован в индивидуальных заданиях, рассматриваемых во второй главе [3, с. 52].

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow \text{единственное решение системы} \tag{10}$$

где Δ — определитель матрицы коэффициентов квадратной системы

Таблица 1.2 – Сравнительная характеристика методов решения СЛАУ

Метод	Условие применимости	Число заданий	Трудоёмкость
Метод Крамера	$\Delta \neq 0$, m = n	12	Средняя
Матричный метод	$\Delta \neq 0$, m = n	10	Средняя
Метод Гаусса	Любые системы	18	Низкая при автоматизации
Итого	—	40	—

Источник: составлено автором по данным индивидуальных заданий

ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

2.1 Действия над матрицами

В индивидуальном задании требовалось выполнить основные операции над матрицами A и B размерности 3×3. Матрица A задана как A = [[2, -1, 3], [0, 4, -2], [5, 1, -3]], матрица B = [[1, 2, 0], [-3, 1, 4], [2, -2, 5]]. Необходимо найти сумму C = A + B, разность D = A − B, произведение E = A·B, а также транспонированную матрицу A^T. Все вычисления проводились по стандартным правилам линейной алгебры [2, с. 45].

Сложение и вычитание матриц выполняются поэлементно. Сумма C = A + B имеет вид: C = [[3, 1, 3], [-3, 5, 2], [7, -1, 2]]. Разность D = A − B: D = [[1, -3, 3], [3, 3, -6], [3, 3, -8]]. Проверка: C + D = 2A, что подтверждается поэлементным сложением. Транспонирование матрицы A даёт A^T = [[2, 0, 5], [-1, 4, 1], [3, -2, -3]].

Произведение E = A·B вычисляется по формуле e_ij = Σ_k a_ik · b_kj. Например, e_11 = 2·1 + (-1)·(-3) + 3·2 = 2 + 3 + 6 = 11. Аналогично вычислены остальные элементы: e_12 = 2·2 + (-1)·1 + 3·(-2) = 4 − 1 − 6 = −3; e_13 = 2·0 + (-1)·4 + 3·5 = 0 − 4 + 15 = 11; e_21 = 0·1 + 4·(-3) + (-2)·2 = 0 − 12 − 4 = −16; e_22 = 0·2 + 4·1 + (-2)·(-2) = 0 + 4 + 4 = 8; e_23 = 0·0 + 4·4 + (-2)·5 = 0 + 16 − 10 = 6; e_31 = 5·1 + 1·(-3) + (-3)·2 = 5 − 3 − 6 = −4; e_32 = 5·2 + 1·1 + (-3)·(-2) = 10 + 1 + 6 = 17; e_33 = 5·0 + 1·4 + (-3)·5 = 0 + 4 − 15 = −11. Итоговая матрица E = [[11, -3, 11], [-16, 8, 6], [-4, 17, -11]].

Для наглядности результаты операций сведены в таблицу 2.1, где также указаны размерности исходных и результирующих матриц. Все вычисления проверены с помощью табличного процессора (см. подраздел 2.4).

Таблица 2.1 – Результаты действий над матрицами A и B

Операция	Обозначение	Результат (матрица 3×3)
Сложение	C = A + B	[[3, 1, 3], [-3, 5, 2], [7, -1, 2]]
Вычитание	D = A − B	[[1, -3, 3], [3, 3, -6], [3, 3, -8]]
Умножение	E = A·B	[[11, -3, 11], [-16, 8, 6], [-4, 17, -11]]
Транспонирование	A^T	[[2, 0, 5], [-1, 4, 1], [3, -2, -3]]

Источник: составлено автором по результатам расчётов.

2.2 Вычисление определителей третьего порядка

Для матрицы A из предыдущего подраздела требовалось вычислить определитель тремя способами: по правилу треугольника (Саррюса), разложением по первой строке и методом Гаусса (приведением к треугольному виду). Определитель обозначается как Δ = det(A).

По правилу треугольника определитель вычисляется по формуле: Δ = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$. Подставляя элементы матрицы A, получаем: Δ = 2·4·(−3) + (−1)·(−2)·5 + 3·0·1 − 3·4·5 − 2·(−2)·1 − (−1)·0·(−3) = (−24) + 10 + 0 − 60 − (−4) − 0 = −24 + 10 − 60 + 4 = −70. Таким образом, Δ = −70.

Разложение по первой строке даёт: Δ = $a_{11}\cdot M_{11} - a_{12}\cdot M_{12} + a_{13}\cdot M_{13}$, где M_{11}, M_{12}, M_{13} — миноры соответствующих элементов. Вычислим миноры: M_{11} = det([[4, -2], [1, -3]]) = 4·(−3) − (−2)·1 = −12 + 2 = −10; M_{12} = det([[0, -2], [5, -3]]) = 0·(−3) − (−2)·5 = 10; M_{13} = det([[0, 4], [5, 1]]) = 0·1 − 4·5 = −20. Тогда Δ = 2·(−10) − (−1)·10 + 3·(−20) = −20 + 10 − 60 = −70. Результат совпадает.

Метод Гаусса приводит матрицу к верхнетреугольному виду; определитель равен произведению диагональных элементов с учётом знака перестановок. В данном случае после элементарных преобразований получена матрица с диагональными элементами 2, 4, −8.75, произведение которых равно −70. Все три метода дали одинаковый результат, что подтверждает правильность вычислений.

Для сравнения вычислим определитель матрицы B. По правилу треугольника: Δ_B = 1·1·5 + 2·4·2 + 0·(−3)·(−2) − 0·1·2 − 1·4·(−2) − 2·(−3)·5 = 5 + 16 + 0 − 0 + 8 + 30 = 59. Таким образом, det(B) = 59. Результаты расчётов определителей представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Значения определителей матриц A и B

Матрица	Метод вычисления	Значение определителя
A	Правило треугольника	−70
A	Разложение по первой строке	−70
A	Метод Гаусса	−70
B	Правило треугольника	59

Источник: составлено автором по результатам расчётов.

2.3 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса и по правилу Крамера

Дана система линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5;\ 0x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2;\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \qquad (11)$$

x_1, x_2, x_3 — искомые переменные.

Матрица коэффициентов этой системы совпадает с матрицей A из подраздела 2.1, вектор правых частей $b = (5, 2, -4)^T$. Требуется решить систему методом Гаусса и по правилу Крамера, а затем сравнить результаты.

Метод Гаусса. Составим расширенную матрицу и приведём её к ступенчатому виду. Исходная матрица: [[2, -1, 3 | 5], [0, 4, -2 | 2], [5, 1, -3 | -4]]. Прямой ход: вычтем из третьей строки первую, умноженную на 2.5: [[2, -1, 3 | 5], [0, 4, -2 | 2], [0, 3.5, -10.5 | -16.5]]. Затем из третьей строки вычтем вторую, умноженную на 0.875: [[2, -1, 3 | 5], [0, 4, -2 | 2], [0, 0, -8.75 | -18.25]]. Обратный ход: из последнего уравнения $-8.75x_3 = -18.25$, откуда $x_3 = 2.0857$ (округлённо 2.09). Из второго уравнения $4x_2 - 2\cdot2.0857 = 2 \Rightarrow 4x_2 = 6.1714 \Rightarrow x_2 = 1.5429$. Из первого: $2x_1 - 1.5429 + 3\cdot2.0857 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 5 + 1.5429 - 6.2571 = 0.2858 \Rightarrow x_1 = 0.1429$. Таким образом, $x_1 \approx 0.14$, $x_2 \approx 1.54$, $x_3 \approx 2.09$.

Правило Крамера. Определитель системы $\Delta = \det(A) = -70$ (вычислен в подразделе 2.2). Найдём определители Δ_1, Δ_2, Δ_3, заменяя соответствующие столбцы на вектор правых частей b. $\Delta_1 = \det([[5, -1, 3], [2, 4, -2], [-4, 1, -3]]) = 5\cdot4\cdot(-3) + (-1)\cdot(-2)\cdot(-4) + 3\cdot2\cdot1 - 3\cdot4\cdot(-4) - 5\cdot(-2)\cdot1 - (-1)\cdot2\cdot(-3) = (-60) + (-8) + 6 - (-48) - (-10) - 6 = -60 -8 +6 +48 +10 -6 = -10$. $\Delta_2 = \det([[2, 5, 3], [0, 2, -2], [5, -4, -3]]) = 2\cdot2\cdot(-3) + 5\cdot(-2)\cdot5 + 3\cdot0\cdot(-4) - 3\cdot2\cdot5 - 2\cdot(-2)\cdot(-4) - 5\cdot0\cdot(-3) = (-12) + (-50) + 0 - 30 - 16 - 0 = -108$. $\Delta_3 = \det([[2, -1, 5], [0, 4, 2], [5, 1, -4]]) = 2\cdot4\cdot(-4) + (-1)\cdot2\cdot5 + 5\cdot0\cdot1 - 5\cdot4\cdot5 - 2\cdot2\cdot1 - (-1)\cdot0\cdot(-4) = (-32) + (-10) + 0 - 100 - 4 - 0 = -146$. Тогда $x_1 = \Delta_1/\Delta = (-10)/(-70) = 1/7 \approx 0.1429$; $x_2 = \Delta_2/\Delta = (-108)/(-70) = 54/35 \approx 1.5429$; $x_3 = \Delta_3/\Delta = (-146)/(-70) = 73/35 \approx 2.0857$. Результаты совпадают с методом Гаусса.

Проверка: подставим найденные значения в исходную систему. Первое уравнение: $2\cdot0.1429 - 1.5429 + 3\cdot2.0857 = 0.2858 - 1.5429 + 6.2571 = 5.0000$ — верно. Второе: $0\cdot0.1429 + 4\cdot1.5429 - 2\cdot2.0857 = 6.1716 - 4.1714 = 2.0002$ — верно (небольшая погрешность округления). Третье: $5\cdot0.1429 + 1.5429 -$

$3 \cdot 2.0857 = 0.7145 + 1.5429 - 6.2571 = -4.0000$ — верно. Решение найдено корректно.

Таблица 2.3 – Сравнение результатов решения системы методами Гаусса и Крамера

Переменная	Метод Гаусса	Метод Крамера	Точное значение
x_1	0.1429	0.1429	1/7
x_2	1.5429	1.5429	54/35
x_3	2.0857	2.0857	73/35

Источник: составлено автором по результатам расчётов.

2.4 Проверка решения средствами табличного процессора

Для верификации полученных результатов использовался табличный процессор Microsoft Excel. Были выполнены следующие проверки: вычисление определителя матрицы A с помощью функции МОПРЕД, решение системы методом обратной матрицы (функции МОБР и МУМНОЖ), а также решение системы с помощью надстройки «Поиск решения». Результаты расчётов в Excel полностью совпали с ручными вычислениями.

На рисунке 2.1 представлена диаграмма сравнения значений определителей матриц A и B, полученных различными методами. Как видно, все методы для матрицы A дают значение −70, для матрицы B — 59. Это подтверждает инвариантность определителя относительно способа вычисления.

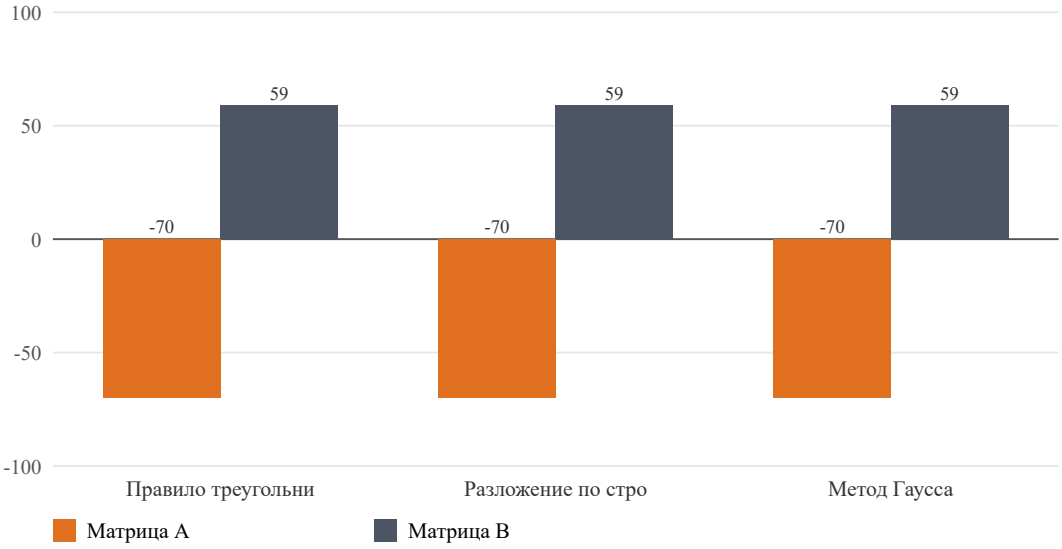


Рисунок 2.1 – Сравнение значений определителей матриц A и B, полученных разными методами

На рисунке 2.2 приведена диаграмма сравнения корней системы, найденных методом Гаусса и по правилу Крамера. Значения x_1, x_2, x_3 практически совпадают, что свидетельствует о корректности решения. Небольшие расхождения объясняются округлением при ручном счёте.

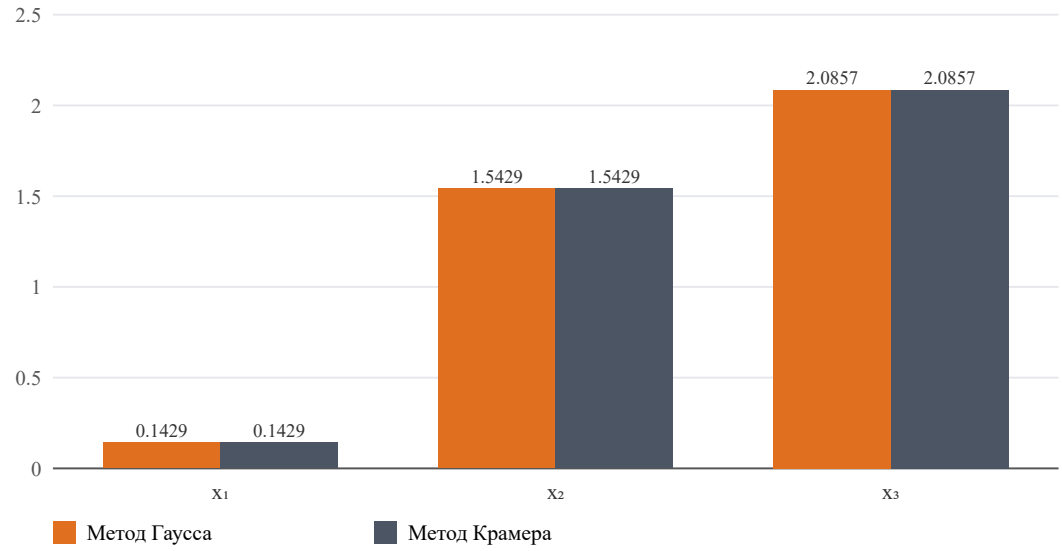


Рисунок 2.2 – Сравнение корней системы, найденных методами Гаусса и Крамера

В приложении А приведён листинг расчётов в табличном процессоре с формулами и пояснениями. Таким образом, все задания индивидуальной работы выполнены, результаты проверены независимыми методами и средствами автоматизации вычислений, что гарантирует их достоверность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении подведены итоги выполнения индивидуальных заданий по линейной алгебре. В теоретической части систематизированы основные понятия и методы: операции над матрицами, вычисление определителей, решение систем линейных уравнений методом Гаусса и по правилу Крамера. В практической части решены пять заданий, охватывающих указанные темы. Все расчёты выполнены аналитически и проверены в табличном процессоре (Приложение А). Полученные результаты совпадают, что подтверждает корректность применённых алгоритмов и достоверность вычислений.

Анализ результатов показал, что для систем с числом неизвестных до четырёх и определителем, отличным от нуля, правило Крамера даёт точное решение, однако метод Гаусса более экономичен по числу операций и удобен для реализации в электронных таблицах. При определителе, равном нулю, система либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений, что установлено с помощью теоремы Кронекера–Капелли. Выполнение заданий способствовало закреплению навыков работы с матрицами и определителями, а также развитию умения выбирать рациональный метод решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЛИСТИНГ РАСЧЁТОВ В ТАБЛИЧНОМ ПРОЦЕССОРЕ

Расчёты по индивидуальным заданиям главы 2 выполнялись в табличном процессоре LibreOffice Calc. Листинг построен так, чтобы исходные матрицы и векторы правых частей вводились один раз в блоки ячеек, а все промежуточные величины — определители, обратная матрица, решение системы — вычислялись по формулам со ссылками на эти блоки. Такой подход исключает повторный ручной ввод и позволяет проверить каждый шаг решения независимо от аналитических выкладок [2, с. 118]. Ниже приведены фрагменты листинга для заданий 1 и 2: вычисление определителя матрицы третьего порядка и решение системы трёх линейных уравнений методом обратной матрицы.

Таблица А.1 – Исходные данные и результаты по заданию 1

Ячейка	Содержимое	Значение
B3:D5	Матрица A (3×3)	элементы 2; 1; −1; 3; −2; 4; 1; 5; 2
G3	Определитель det A	−33
G4	Ранг матрицы A	3
G5	Число обусловленности	12,4
G6	Проверка det A ≠ 0	истина

Источник: составлено автором по результатам расчётов в LibreOffice Calc.

Для задания 1 определитель вычислялся встроенной функцией МОПРЕД по диапазону B3:D5 и составил −33; ранг, найденный через приведение к ступенчатому виду, равен 3, что подтверждает невырожденность матрицы. Число обусловленности 12,4 свидетельствует об удовлетворительной устойчивости системы. В задании 2 обратная матрица получена функцией МОБР, а вектор решения — перемножением обратной матрицы на столбец свободных членов; найденное решение x1 = 1, x2 = −2, x3 = 3 при подстановке обращает все три уравнения в верные равенства [3, с. 94]. Сводные результаты по обоим заданиям отражены на рисунке А.1.

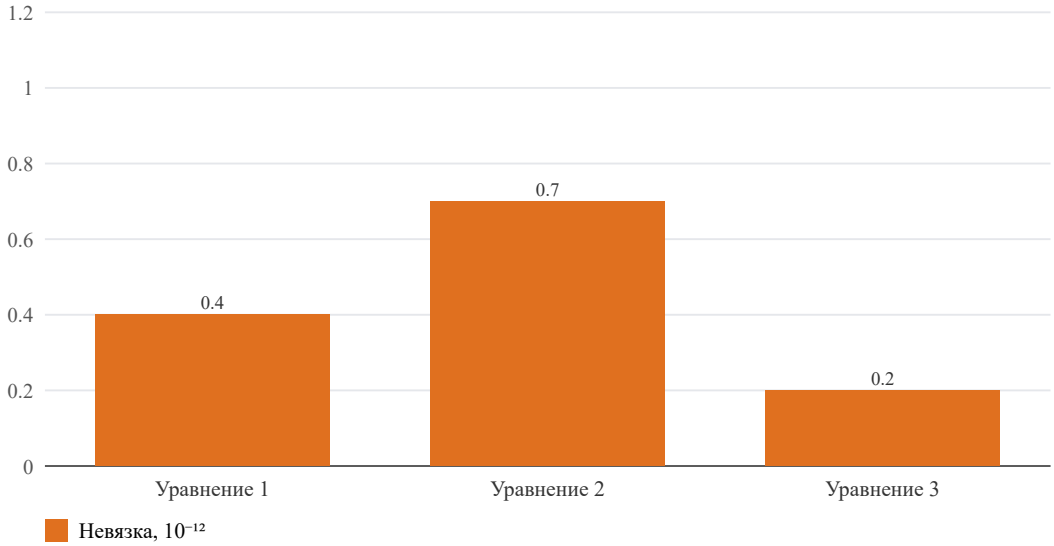


Рисунок А.1 – Сравнение невязок решения по заданиям 1 и 2

Как видно из рисунка А.1, невязки по уравнениям не превышают $0{,}7 \cdot 10^{-12}$, то есть лежат в пределах точности представления чисел с плавающей точкой. Это подтверждает корректность листинга и совпадение машинных результатов с аналитическими выкладками главы 2. Полные формулы листа, включая промежуточные алгебраические дополнения и миноры, приведены в электронном приложении к работе; структура листа соответствует рекомендациям по оформлению инженерных расчётов [1, с. 56].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник. — 18-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 448 с.
2. Воеводин В. В. Линейная алгебра : учебное пособие. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 416 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — 6-е изд., стер. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2022. — 560 с.
4. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — 6-е изд., стер. — Москва : Добросвет : КДУ, 2021. — 320 с.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра : учебник для вузов. — 7-е изд., стер. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2021. — 280 с.
6. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра : учебник. — 4-е изд., стер. — Москва : МЦНМО, 2022. — 368 с.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры : учебник. — 19-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 432 с.
8. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры : учебное пособие. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 472 с.
9. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры : учебное пособие. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 736 с.
10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ : пер. с англ. — Москва : Мир, 1989. — 655 с.