РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

по высшей математике

на тему:

Пределы последовательностей и функций, непрерывность функции в точке

ПРИМЕР

Брянск · 2026

Пример работы с сайта bryansk-diplom.ru. Не предназначен для сдачи как собственная работа.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Задача 1. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-4n+6n^2-4n^3+n^4-1-4n-6n^2-4n^3-n^4}{1+3n+3n^2+n^3-1+3n-3n^2+n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-8n^3-8n}{2n^3+6n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8-8/n^2}{2+6/n^2}=\frac{-8}{2}=-4.$$

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1/n+6/n^2}-\sqrt{1-5/n^2}}{\sqrt[3]{1+3/n^3}+\sqrt[4]{1/n+1/n^4}}=\frac{-1}{1}=-1.$$

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)\left(\sqrt[3]{(5+n^3)^2}+\sqrt[3]{(5+n^3)(3+n^3)}+\sqrt[3]{(3+n^3)^2}\right)}{\sqrt[3]{(5+n^3)^2}+\sqrt[3]{(5+n^3)(3+n^3)}+\sqrt[3]{(3+n^3)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(5+n^3-3-n^3\right)}{\sqrt[3]{(5+n^3)^2}+\sqrt[3]{(5+n^3)(3+n^3)}+\sqrt[3]{(3+n^3)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(5+n^3)^2}+\sqrt[3]{(5+n^3)(3+n^3)}+\sqrt[3]{(3+n^3)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{\left(\frac{5}{n^3}+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{5}{n^3}+1\right)\left(\frac{3}{n^3}+1\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{3}{n^3}+1\right)^2}} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

Задача 4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)/2} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 2.$$

Задача 5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-11}{n+1}\right)^{3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-11}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-11}}\right]^{\frac{-11(3n+1)}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-33n-11}{n+1}} = e^{-\lim_{n\to\infty}\frac{33+11/n}{1+1/n}} = e^{-33}.$$

Задача 6. Доказать (найти

$$\delta(\varepsilon)$$

), что:

$\lim\limits_{x \to 1/3} \frac{6x^2+x-1}{x-1/3} = 5.$

Здесь функция $\frac{6x^2+x-1}{x-1/3}$ не определена при $x = 1/3$.

Нужно доказать, что при произвольном $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon)$, что будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{6x^2+x-1}{x-1/3} - 5 \right| < \varepsilon \quad (1)$$

если $|x - \frac{1}{3}| < \delta(\varepsilon)$. Но при $x \neq 1/3$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\left| \frac{(x-1/3)(6x+3)}{x-1/3} - 5 \right| = |6x+3-5| = 6|x-\tfrac{1}{3}| < \varepsilon$$

или $|x - \frac{1}{3}| < \frac{\varepsilon}{6}$ (2)

Таким образом, при произвольном $\varepsilon > 0$ неравенство (1) будет выполняться, если будет выполняться неравенство (2) (здесь $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/6$). А это значит, что данная ф-ция при $x \to 1/3$ имеет пределом число 5.

Задача 7. Доказать, что функция

$$f(x)$$

непрерывна в точке (найти

$$\delta(\varepsilon)$$

).

$f(x) = -2x^2 + 7$, $x_0 = 6$

покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

$|-2x^2 + 7 - (-2 \cdot 6^2 + 7)| = |-2x^2 + 72| = 2|x^2 - 36| < \varepsilon$

$|x^2 - 36| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|(x-6)(x+6)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x-6| < \frac{\varepsilon}{2}$

Т.е. неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ выполняется при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Задача 8. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 - 3x + 2)}{(x-2)(x^2 - x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

Задача 9. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x\to 1/3}\frac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 1/3}\frac{(\sqrt[3]{x/9}-1/3)(\sqrt[3]{x^2/81}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x/9}+1/9)(\sqrt{1/3+x}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x})(\sqrt{1/3+x}+\sqrt{2x})(\sqrt[3]{x^2/81}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x/9}+1/9)}=$$

$$=\lim_{x\to 1/3}\frac{\frac{1}{9}(x-\frac{1}{3})(\sqrt{\frac{1}{3}+x}+\sqrt{2x})}{(\frac{1}{3}-x)(\sqrt[3]{x^2/81}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x/9}+1/9)}=$$

$$=-\frac{1}{9}\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{\frac{1}{3}+x}+\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x^2/81}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x/9}+1/9}=-\frac{1}{9}\cdot\frac{2\sqrt{2/3}}{1/3}=-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

Задача 10. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{tg(\pi(2+x))}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{tg2\pi x}=$$

$$=\frac{4}{2\pi}\lim_{x\to 0}\frac{2\pi x}{tg2\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$