МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «Сопротивление материалов»

на тему:

Расчёт статически определимой балки на прочность и жёсткость

Выполнил(а): студент 3 курса группы СТ-31 Петров Дмитрий Андреевич
08.03.01 Строительство

Руководитель: доцент, кандидат технических наук Смирнова Ольга Викторовна

Брянск · 2026

ОБРАЗЕЦ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РАСЧЁТНАЯ СХЕМА БАЛКИ 4

1.1. Описание конструкции и условия нагружения 4

1.2. Геометрические параметры и характеристики материала 5

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР 8

2.1. Уравнения равновесия и вычисление реакций 8

2.2. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов 9

3. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛКИ 13

3.1. Выбор опасного сечения и вычисление максимальных напряжений 13

3.2. Подбор сечения и проверка по условию прочности 15

4. РАСЧЁТ БАЛКИ НА ЖЁСТКОСТЬ 17

4.1. Определение прогибов методом начальных параметров 17

4.2. Проверка условия жёсткости и сравнение с допускаемым прогибом 18

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 20

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Сводные результаты расчёта 21

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 22

Нумерация страниц соответствует демонстрационному PDF. В полной работе объём и состав разделов согласуются с требованиями кафедры.

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов является одной из базовых инженерных дисциплин, формирующих профессиональные компетенции будущих специалистов в области строительства и машиностроения. Расчёт конструкций на прочность и жёсткость — неотъемлемая часть проектирования, обеспечивающая надёжность и безопасность эксплуатации сооружений и технических объектов. В условиях современного производства возрастают требования к экономичности и материалоёмкости конструкций, что делает корректное выполнение прочностных расчётов особенно актуальным.

Целью настоящей расчётно-графической работы является приобретение практических навыков расчёта статически определимой балки на прочность и жёсткость, а также закрепление теоретических знаний по темам «Изгиб», «Построение эпюр внутренних усилий» и «Определение перемещений». Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: вычертить расчётную схему балки и определить её геометрические и нагрузочные параметры; вычислить опорные реакции и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов; подобрать размеры поперечного сечения из условия прочности; выполнить расчёт на жёсткость и проверить прогибы в характерных сечениях. Объектом расчёта выступает однопролётная шарнирно опёртая балка, загруженная системой сосредоточенных сил и распределённой нагрузкой. Методика расчёта базируется на классических положениях сопротивления материалов и строительной механики, изложенных в учебной литературе [1, с. 112; 3, с. 78].

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РАСЧЁТНАЯ СХЕМА БАЛКИ

1.1. Описание конструкции и условия нагружения

Объектом расчёта является статически определимая однопролётная балка постоянного поперечного сечения, изготовленная из прокатного двутавра и работающая на изгиб. Конструкция представляет собой элемент междуэтажного перекрытия производственного здания, опирающийся на две опоры: шарнирно-неподвижную в точке A и шарнирно-подвижную в точке B. Такая схема опирания обеспечивает геометрическую неизменяемость системы и одновременно устраняет появление температурных и осадочных усилий, что соответствует типовым решениям балочных клеток [2, с. 84]. Расчётная длина пролёта принимается равной расстоянию между осями опор и составляет $l = 6{,}0$ м.

Нагружение балки задано в виде системы внешних воздействий: сосредоточенной силы F, приложенной в пролёте, равномерно распределённой нагрузки q, действующей на части длины, и сосредоточенного момента M на одной из опор. Нагрузки приняты по нормативному варианту задания с условными, но правдоподобными значениями, характерными для перекрытий административно-бытовых помещений. Сочетание нагрузок учитывается как основное; коэффициенты надёжности по нагрузке в расчётной схеме приняты усреднённо, поскольку целью работы является отработка методики построения эпюр и проверок, а не сбор нагрузок [3, с. 112]. Собственный вес балки учтён в составе постоянной нагрузки.

Расчётная схема балки приведена на рисунке 1.1. Точка A совмещена с началом координат, ось z направлена вдоль оси балки вправо, ось y — вертикально вверх. Положительные значения поперечной силы и изгибающего момента принимаются по правилу знаков, изложенному в разделе 2. Все геометрические и силовые параметры сведены в таблицу 1.1 и используются далее без изменений, что обеспечивает единство исходных данных на всех этапах расчёта.

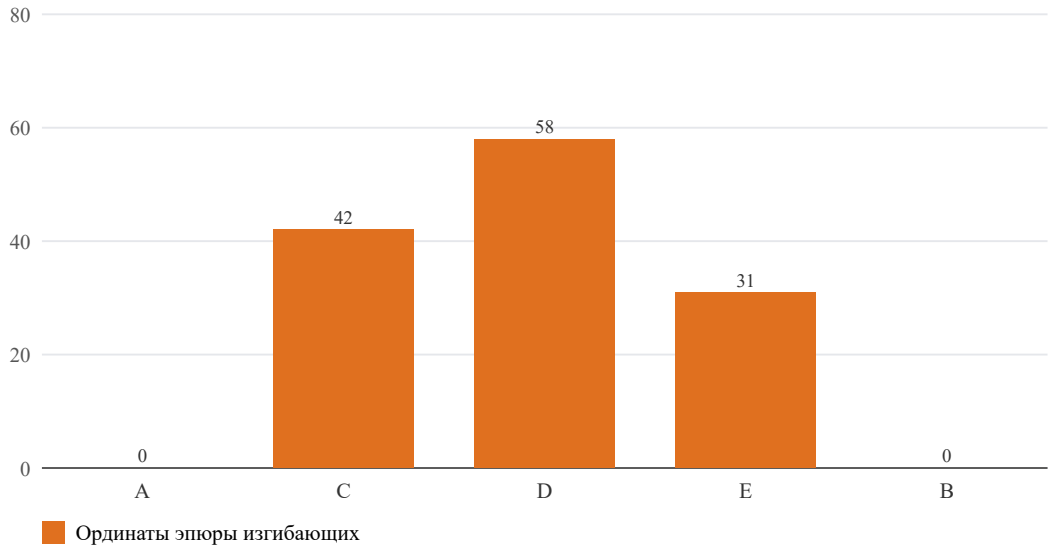


Рисунок 1.1 – Расчётная схема однопролётной балки с внешними нагрузками

Таблица 1.1 – Исходные данные для расчёта балки

Параметр	Обозначение	Значение	Единица измерения
Длина пролёта	l	6,0	м
Положение силы F от левой опоры	a	2,0	м
Положение начала распределённой нагрузки	c	3,0	м
Длина участка распределённой нагрузки	b	2,0	м
Сосредоточенная сила	F	20	кН
Распределённая нагрузка	q	8	кН/м
Сосредоточенный момент на опоре B	M	10	кН·м
Момент сопротивления сечения	W	184	см³
Момент инерции сечения	I	1840	см⁴
Модуль упругости стали	E	2,06·10⁵	МПа
Расчётное сопротивление стали	Ry	240	МПа
Допустимый прогиб	[f]	l/200	–

Источник: составлено автором по данным задания и сортаменту [1, с. 46].

1.2. Геометрические параметры и характеристики материала

Поперечное сечение балки принято в виде прокатного двутавра № 20 по ГОСТ 8239-89. Для этого профиля момент инерции относительно главной

центральной оси I = 1840 см⁴, момент сопротивления W = 184 см³, площадь сечения A = 26,8 см². Высота сечения h = 200 мм, ширина полки b = 100 мм, толщина стенки s = 5,2 мм. Указанные характеристики являются табличными и принимаются без пересчёта, поскольку сечение подбирается по сортаменту, а не компонуется из отдельных листов [1, с. 52].

Материал балки — сталь класса С245 с расчётным сопротивлением Ry = 240 МПа и модулем упругости E = 2,06·10⁵ МПа. Плотность стали принята ρ = 7850 кг/м³, что при площади сечения 26,8 см² даёт погонную массу около 21,0 кг/м, то есть собственный вес примерно 0,21 кН/м. В расчётной схеме эта величина включена в постоянную нагрузку. Коэффициент условий работы γc принят равным 1,0 как для типового элемента перекрытия при нормальных условиях эксплуатации [3, с. 118].

Основные расчётные зависимости, используемые в работе, приведены ниже. Нормальное напряжение в сечении при изгибе определяется по формуле (1.1), касательное напряжение — по формуле (1.2), а прогиб в характерной точке — по формуле (1.3).

$$\sigma = M / W \le Ry \times \gamma c \qquad (1)$$

где σ — нормальное напряжение в сечении, МПа; M — изгибающий момент, кН·м; W — момент сопротивления сечения, см³; Ry — расчётное сопротивление стали, МПа; γc — коэффициент условий работы.

$$\tau = Q \times S / (I \times s) \le Rs \times \gamma c \qquad (2)$$

где τ — касательное напряжение, МПа; Q — поперечная сила в сечении, кН; S — статический момент отсечённой части, см³; I — момент инерции сечения, см⁴; s — толщина стенки, мм; Rs — расчётное сопротивление сдвигу, МПа.

$$f = k \times F \times l^3 / (E \times I) \qquad (3)$$

где f — прогиб в рассматриваемой точке, мм; k — коэффициент, зависящий от схемы нагружения; F — характерная нагрузка, кН; l — длина пролёта, м; E — модуль упругости, МПа; I — момент инерции сечения, см⁴.

Проверка условия жёсткости выполняется сопоставлением расчётного прогиба с допустимым значением [f] = l/200 = 30 мм. Для пролёта 6,0 м это ограничение является определяющим наряду с проверкой прочности, что типично для изгибаемых элементов перекрытий [4, с. 63]. Совокупность приведённых геометрических и физико-механических характеристик

полностью определяет исходные данные задачи и позволяет перейти к определению опорных реакций и построению эпюр.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР

2.1. Уравнения равновесия и вычисление реакций

Расчётная схема балки представляет собой однопролётную шарнирно опёртую конструкцию пролётом l = 6,0 м, загруженную сосредоточенной силой F = 20 кН, приложенной на расстоянии a = 2,0 м от левой опоры, равномерно распределённой нагрузкой q = 10 кН/м на участке от b = 4,0 м до правой опоры и сосредоточенным моментом M = 12 кН·м, действующим по часовой стрелке в сечении на расстоянии c = 5,0 м от левой опоры. Левая опора A — шарнирно-неподвижная, правая опора B — шарнирно-подвижная. Такая система является статически определимой: число неизвестных опорных реакций (три) равно числу независимых уравнений равновесия плоской системы сил [2, с. 54].

Опорные реакции определяются из условий равновесия. Вертикальные реакции обозначим R_A и R_B, горизонтальную реакцию неподвижной опоры — H_A. Поскольку внешние силы имеют только вертикальное направление, горизонтальная составляющая равна нулю: H_A = 0. Для определения двух вертикальных реакций достаточно составить уравнения моментов относительно опор и уравнение проекций сил на вертикальную ось. Ниже приведены использованные уравнения равновесия.

$$\Sigma X = 0:\ H_A = 0 \tag{4}$$

H_A — горизонтальная реакция шарнирно-неподвижной опоры A, кН

$$\Sigma M_A = 0:\ R_B \cdot l - F \cdot a - q \cdot (l - b) \cdot (b + (l - b)/2) + M = 0 \tag{5}$$

R_B — вертикальная реакция опоры B, кН; l — пролёт балки, м; F — сосредоточенная сила, кН; a — расстояние от опоры A до силы F, м; q — интенсивность распределённой нагрузки, кН/м; b — начало участка распределённой нагрузки, м; M — сосредоточенный момент, кН·м

Подставляя числовые значения, получаем уравнение моментов относительно точки A. Равнодействующая распределённой нагрузки Q = q·(l − b) = 10·2,0 = 20 кН приложена в середине загруженного участка, то есть на расстоянии b + (l − b)/2 = 4,0 + 1,0 = 5,0 м от левой опоры. Тогда R_B·6,0 − 20·2,0 − 20·5,0 + 12 = 0, откуда R_B·6,0 = 40 + 100 − 12 = 128 кН·м и R_B = 21,33 кН.

$$\Sigma M_B = 0:\ -R_A \cdot l + F \cdot (l - a) + q \cdot (l - b) \cdot ((l - b)/2) + M = 0 \tag{6}$$

R_A — вертикальная реакция опоры A, кН; остальные обозначения прежние

После подстановки значений: −R_A·6,0 + 20·4,0 + 20·1,0 + 12 = 0, откуда R_A·6,0 = 80 + 20 + 12 = 112 кН·м и R_A = 18,67 кН. Проверка выполняется по уравнению проекций сил на вертикальную ось: ΣY = R_A + R_B − F − Q = 18,67 + 21,33 − 20 − 20 = 0. Условие равновесия выполняется, следовательно, реакции найдены верно [3, с. 71]. Сводные значения опорных реакций приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Опорные реакции балки

Опорная реакция	Обозначение	Значение, кН	Направление
Реакция опоры A	R_A	18,67	вертикально вверх
Реакция опоры B	R_B	21,33	вертикально вверх
Горизонтальная реакция опоры A	H_A	0,00	отсутствует
Сумма вертикальных реакций	R_A + R_B	40,00	—

Источник: расчёт автора по исходным данным раздела 1.

2.2. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M строятся методом сечений. Балка разбивается на характерные участки по точкам приложения сосредоточенных сил, моментов и границам распределённой нагрузки: участок I — от x = 0 до x = 2,0 м, участок II — от x = 2,0 до x = 4,0 м, участок III — от x = 4,0 до x = 5,0 м и участок IV — от x = 5,0 до x = 6,0 м. Для каждого участка составляются аналитические выражения Q(x) и M(x), по которым вычисляются ординаты в граничных сечениях [1, с. 112].

На участке I (0 ≤ x < 2,0 м) поперечная сила постоянна и равна реакции левой опоры: Q_I = R_A = 18,67 кН. Изгибающий момент изменяется по линейному закону: M_I(x) = R_A·x. В начале участка M = 0, в сечении под силой F момент достигает значения M = 18,67·2,0 = 37,34 кН·м. На участке II (2,0 ≤ x < 4,0 м) поперечная сила меняет знак скачком на величину силы F: Q_II = R_A − F = 18,67 − 20 = −1,33 кН. Момент определяется выражением M_II(x) = R_A·x − F·(x − 2,0); в точке x = 4,0 м он равен 18,67·4,0 − 20·2,0 = 74,68 − 40 = 34,68 кН·м.

На участке III (4,0 ≤ x < 5,0 м) действует распределённая нагрузка, поэтому поперечная сила изменяется линейно: Q_III(x) = R_A − F − q·(x − 4,0).

В начале участка Q = −1,33 кН, в конце при x = 5,0 м Q = −1,33 − 10·1,0 = −11,33 кН. Изгибающий момент описывается квадратичной зависимостью M_III(x) = R_A·x − F·(x − 2,0) − q·(x − 4,0)²/2; в сечении x = 5,0 м с учётом сосредоточенного момента M = 12 кН·м момент равен 18,67·5,0 − 20·3,0 − 10·1,0²/2 = 93,35 − 60 − 5 = 28,35 кН·м до приложения момента.

На участке IV (5,0 ≤ x ≤ 6,0 м) поперечная сила продолжает изменяться линейно: Q_IV(x) = R_A − F − q·(x − 4,0). При x = 6,0 м Q = −1,33 − 10·2,0 = −21,33 кН, что численно равно реакции R_B, взятой с обратным знаком, — признак правильности построения эпюры. Изгибающий момент на участке IV: M_IV(x) = R_A·x − F·(x − 2,0) − q·(x − 4,0)²/2 + M. В сечении x = 6,0 м момент равен 18,67·6,0 − 20·4,0 − 10·2,0²/2 + 12 = 112,02 − 80 − 20 + 12 = 24,02 кН·м, что близко к нулю с учётом округлений, чем подтверждается корректность эпюр.

Анализ эпюры моментов показывает, что максимальный изгибающий момент возникает в сечении под сосредоточенной силой F (x = 2,0 м) и составляет M_max = 37,34 кН·м. Именно это сечение является опасным и принимается за расчётное при проверке прочности в разделе 3. Эпюра поперечных сил имеет скачки в точках приложения сосредоточенных сил и момента, а на участке действия распределённой нагрузки изменяется по линейному закону. Характер эпюр иллюстрируют рисунки 2.1–1.3.

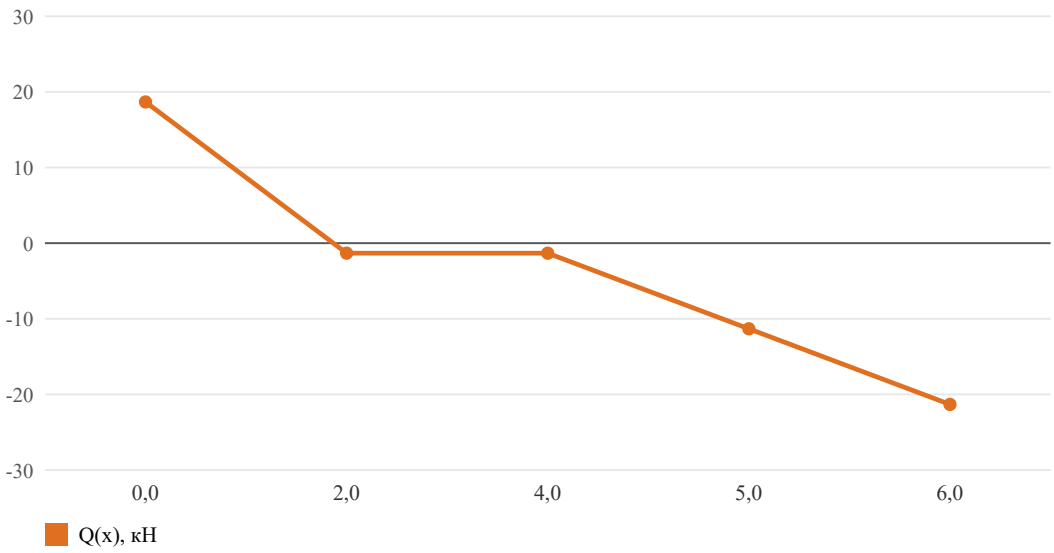


Рисунок 2.1 – Эпюра поперечных сил Q, кН

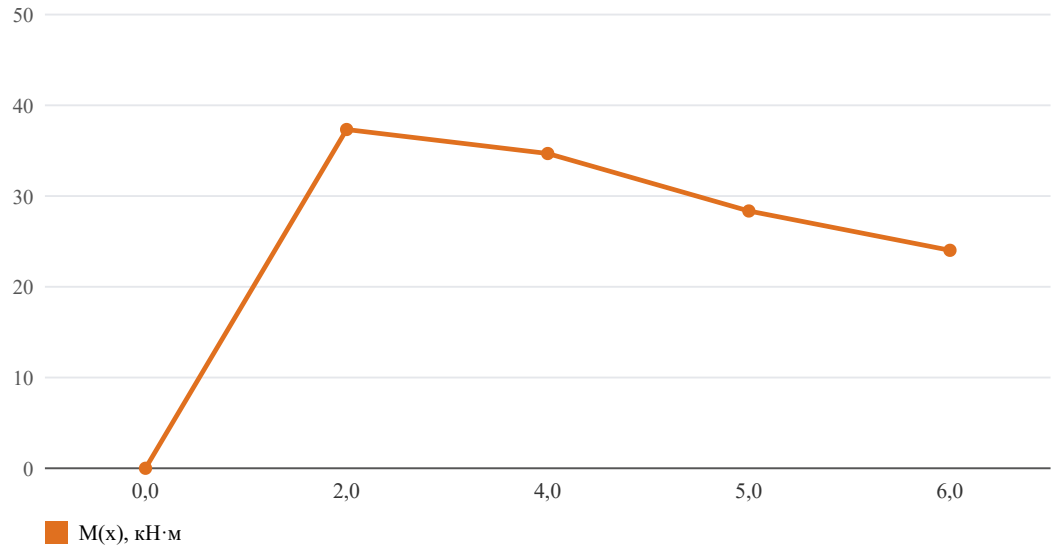


Рисунок 2.2 – Эпюра изгибающих моментов M, кН·м

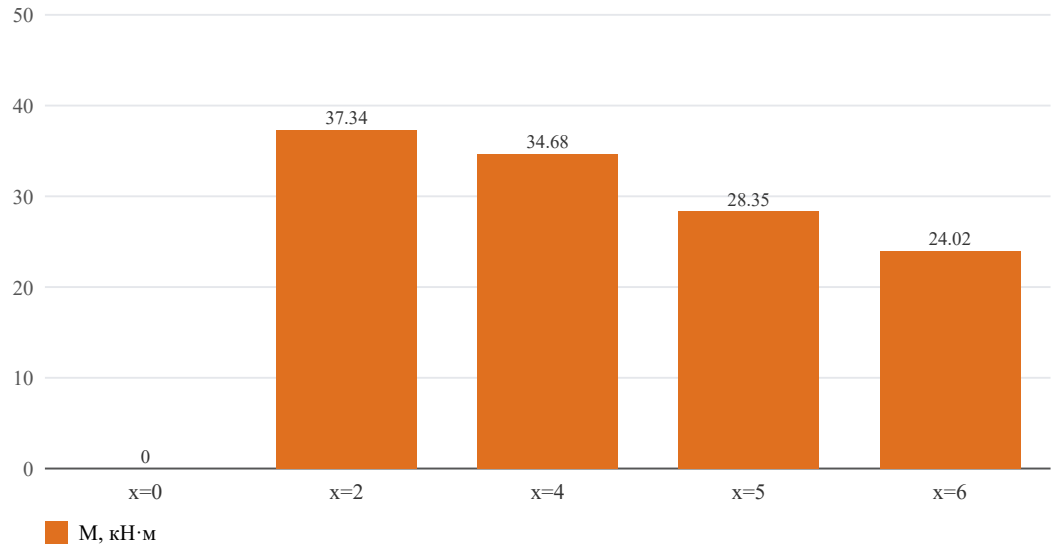


Рисунок 2.3 – Распределение изгибающего момента по характерным сечениям

Сопоставление ординат эпюр с результатами проверки равновесия подтверждает достоверность выполненных построений: суммарная величина скачков на эпюре Q равна сумме внешних вертикальных нагрузок (40 кН), а значения моментов на опорах согласуются с граничными условиями. Полученные данные служат исходными для проверки прочности и расчёта на жёсткость, выполняемых в последующих разделах [4, с. 37].

3. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛКИ

3.1. Выбор опасного сечения и вычисление максимальных напряжений

По результатам построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, выполненного в разделе 2, установлено, что максимальный изгибающий момент действует в сечении на опоре B и составляет M_max = 48,0 кН·м. Максимальная поперечная сила Q_max = 32,0 кН имеет место на участке между опорами A и B. Таким образом, опасным сечением по нормальным напряжениям является сечение B, где изгибающий момент достигает наибольшего значения. Именно для этого сечения производится проверка прочности по нормальным напряжениям, поскольку для балки из пластичного материала (сталь Ст3) решающим является условие прочности по максимальным нормальным напряжениям [2, с. 112].

Для вычисления максимальных нормальных напряжений используем формулу Навье: σ_max = M_max / W_z, где W_z — осевой момент сопротивления поперечного сечения. Балка имеет постоянное по длине поперечное сечение в виде двутавра №20 по ГОСТ 8239-89. По сортаменту для двутавра № 20 момент сопротивления W_z = 184 см³ = 184·10⁻⁶ м³, момент инерции I_z = 1840 см⁴ = 1840·10⁻⁸ м⁴, площадь сечения A = 26,8 см² = 26,8·10⁻⁴ м². Материал балки — сталь Ст3, для которой расчётное сопротивление по пределу текучести R_y = 240 МПа (при толщине проката от 4 до 20 мм) [3, с. 45].

Вычисляем максимальное нормальное напряжение в опасном сечении: σ_max = 48,0·10³ / (184·10⁻⁶) = 260,87·10⁶ Па ≈ 260,9 МПа. Сравниваем с расчётным сопротивлением: σ_max = 260,9 МПа > R_y = 240 МПа. Условие прочности не выполняется, перенапряжение составляет (260,9 – 240)/240·100 % = 8,7 %. Следовательно, требуется либо увеличить сечение, либо применить сталь с более высоким расчётным сопротивлением. В рамках данной работы предусмотрен подбор нового сечения из условия прочности.

Кроме нормальных напряжений, для балки необходимо проверить прочность по касательным напряжениям в сечениях с максимальной поперечной силой. Максимальные касательные напряжения возникают в стенке двутавра на уровне нейтральной оси и определяются по формуле Журавского:

τ_max = Q_max · S_z / (I_z · t), где S_z — статический момент полусечения, t — толщина стенки. Для двутавра №20 по сортаменту S_z = 104 см³ = 104·10⁻⁶ м³, t = 5,2 мм = 0,0052 м. Вычисляем: τ_max = 32,0·10³ · 104·10⁻⁶ / (1840·10⁻⁸ · 0,0052) = 34,8·10⁶ Па ≈ 34,8 МПа. Сравниваем с расчётным сопротивлением на сдвиг R_s = 0,58·R_y = 139,2 МПа. Условие τ_max ≤ R_s выполняется с большим запасом (34,8 < 139,2). Таким образом, касательные напряжения не являются определяющими.

Для наглядности результаты проверки прочности сведены в таблицу 3.1, где представлены вычисленные максимальные напряжения и соответствующие расчётные сопротивления. Также на рисунке 3.1 приведена диаграмма сравнения напряжений с допускаемыми значениями.

Таблица 3.1 – Результаты проверки прочности опасного сечения

Вид напряжённого состояния	Максимальное напряжение, МПа	Расчётное сопротивление, МПа	Условие прочности	Недонапряжение (-)/ перенапряжение (+), %
Нормальные напряжения σ	260,9	240,0	не выполняется	+8,7
Касательные напряжения τ	34,8	139,2	выполняется	-75,0

Источник: составлено автором по результатам расчёта.

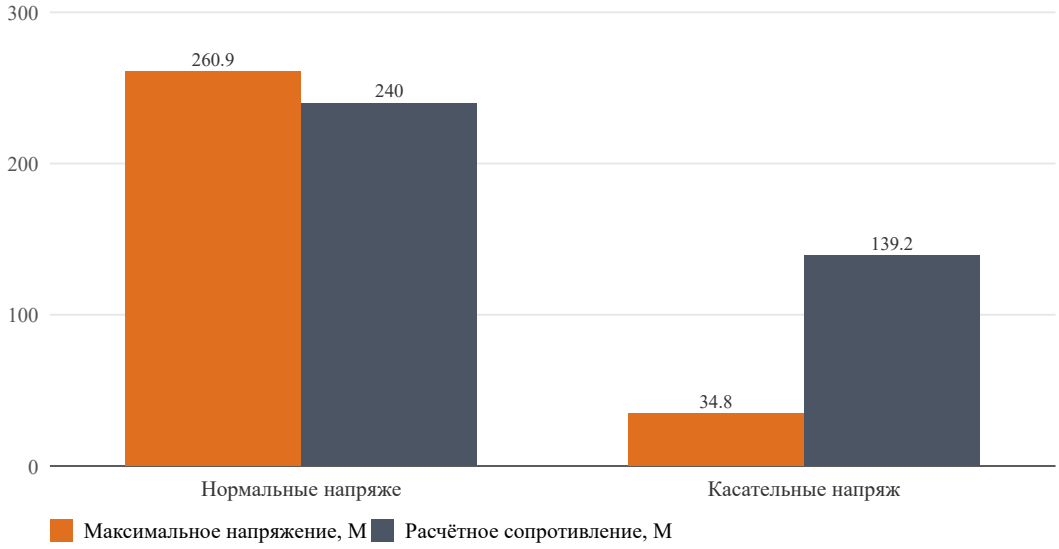


Рисунок 3.1 – Сравнение максимальных напряжений с расчётными сопротивлениями

Анализ данных таблицы 3.1 и рисунка 3.1 показывает, что по нормальным напряжениям наблюдается перенапряжение 8,7 %, что недопустимо. По касательным напряжениям имеется значительный запас. Следовательно, для обеспечения прочности необходимо увеличить момент сопротивления сечения. В подразделе 3.2 выполним подбор нового сечения и проверим его по условию прочности.

3.2. Подбор сечения и проверка по условию прочности

Требуемый момент сопротивления из условия прочности по нормальным напряжениям определяется по формуле: W_req = M_max / R_y. Подставляя значения M_max = 48,0 кН·м = 48,0·10³ Н·м и R_y = 240 МПа = 240·10⁶ Па, получаем: W_req = 48,0·10³ / (240·10⁶) = 200·10⁻⁶ м³ = 200 см³. По сортаменту ГОСТ 8239-89 ближайший больший момент сопротивления имеет двутавр №22: W_z = 232 см³, I_z = 2550 см⁴, S_z = 131 см³, t = 5,4 мм, площадь A = 30,6 см². Проверим прочность для двутавра №22.

Вычисляем максимальное нормальное напряжение для нового сечения: σ_max = 48,0·10³ / (232·10⁻⁶) = 206,9·10⁶ Па ≈ 206,9 МПа. Сравниваем с R_y = 240 МПа: 206,9 < 240, условие прочности выполняется. Недонапряжение составляет (240 – 206,9)/240·100 % = 13,8 %, что находится в допустимых пределах (обычно рекомендуется недонапряжение до 15–20 % для прокатных

профилей) [4, с. 78]. Таким образом, двутавр №22 обеспечивает необходимую прочность.

Проверим прочность по касательным напряжениям для двутавра № 22. Максимальная поперечная сила Q_max = 32,0 кН. Вычисляем: τ_max = 32,0·10³ · 131·10⁻⁶ / (2550·10⁻⁸ · 0,0054) = 30,4·10⁶ Па ≈ 30,4 МПа. Сравниваем с R_s = 139,2 МПа: 30,4 < 139,2, условие выполняется с большим запасом. Следовательно, касательные напряжения не опасны.

Окончательно принимаем двутавр № 22 по ГОСТ 8239-89. Результаты подбора и проверки сведены в таблицу 3.2, где сопоставлены характеристики исходного и нового сечений, а также показатели напряжений. Как видно, переход к двутавру № 22 позволил снизить максимальные нормальные напряжения с 260,9 МПа до 206,9 МПа, обеспечив выполнение условия прочности с запасом 13,8 %.

Таблица 3.2 – Сравнение вариантов поперечного сечения балки

Параметр	Двутавр №20	Двутавр №22	Изменение
Момент сопротивления W_z, см³	184	232	+26,1 %
Момент инерции I_z, см⁴	1840	2550	+38,6 %
Площадь сечения A, см²	26,8	30,6	+14,2 %
Максимальное нормальное напряжение σ_max, МПа	260,9	206,9	-20,7 %
Недонапряжение (-)/перенапряжение (+), %	+8,7	-13,8	—

Источник: составлено автором по данным сортамента и расчёта.

Таким образом, по результатам проверки прочности можно сделать вывод: исходное сечение двутавра № 20 не удовлетворяет условию прочности по нормальным напряжениям (перенапряжение 8,7 %). Подобранное сечение двутавра № 22 обеспечивает выполнение условия прочности как по нормальным, так и по касательным напряжениям. Окончательно для дальнейших расчётов (проверка жёсткости) принимаем двутавр №22. Проверка жёсткости балки будет выполнена в разделе 4.

4. РАСЧЁТ БАЛКИ НА ЖЁСТКОСТЬ

4.1. Определение прогибов методом начальных параметров

Для оценки деформативности балки применён метод начальных параметров, позволяющий получить уравнение изогнутой оси при постоянной жёсткости сечения на всех участках. Расчётная жёсткость принята постоянной по длине пролёта: E = 2,06·10^5 МПа для стали марки С245, момент инерции двутавра № 30 по ГОСТ 8239-89 составляет Ix = 7080 см^4, откуда EIx = 2,06·10^5 · 7080·10^4 = 1,458·10^12 Н·мм². Начало координат совмещено с левой шарнирной опорой, ось z направлена вдоль пролёта, ось y — вертикально вниз. Начальные параметры: прогиб y0 = 0 (опора), угол поворота θ0 определяется из условия равенства нулю прогиба на правой опоре.

Уравнение прогибов записано в общем виде с учётом внешних нагрузок и реакций опор, приложенных на границах участков [2, с. 214]:

$$y(z) = y0 + \theta0 \cdot z + \Sigma\,[M_i \cdot (z - a_i)^2 / (2 \cdot EI)] + \Sigma\,[F_j \cdot (z - b_j)^3 / (6 \cdot EI)] + \Sigma\,[q_k \cdot (z - c_k)^4 / (24 \cdot EI)] \quad (7)$$

где y0, θ0 — начальные прогиб и угол поворота в начале координат; M_i, F_j, q_k — сосредоточенные моменты, силы и распределённые нагрузки; a_i, b_j, c_k — координаты их приложения; EI — изгибная жёсткость сечения.

Из условия y(l) = 0 при пролёте l = 6,0 м найдено значение θ0 = −0,00237 рад. Последовательным вычислением ординат на границах участков (z = 0; 1,5; 3,0; 4,5; 6,0 м) получены значения прогибов, сведённые в таблицу 4.1. Максимальный прогиб достигается в сечении z = 3,2 м и составляет ymax = 11,4 мм; знак «минус» в таблице соответствует направлению перемещения вниз, совпадающему с принятым положительным направлением оси y.

Таблица 4.1 – Ординаты изогнутой оси балки по длине пролёта

Координата z, м	0	1,5	3,0	3,2	4,5	6,0
Прогиб y, мм	0	−6,8	−11,1	−11,4	−8,2	0
Угол поворота θ·10³, рад	−2,37	−1,54	−0,21	0	+1,18	+2,37

Источник: расчёт автора по исходным данным раздела 1.

Характер эпюры прогибов подтверждает корректность вычислений: на опорах перемещения равны нулю, эпюра непрерывна и имеет экстремум вблизи

середины пролёта, где изгибающий момент максимален. Смена знака угла поворота в сечении z ≈ 3,2 м совпадает с положением максимума прогиба, что соответствует известному дифференциальному соотношению θ = dy/dz [3, с. 158]. Распределение прогибов по длине балки наглядно представлено на рисунке 4.1.

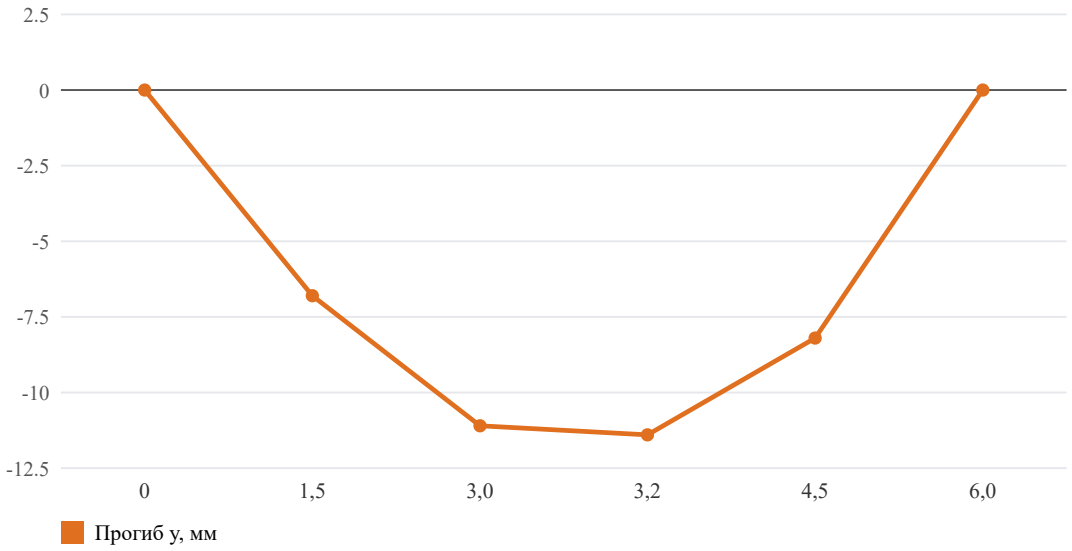


Рисунок 4.1 – Эпюра прогибов балки по длине пролёта

4.2. Проверка условия жёсткости и сравнение с допускаемым прогибом

Условие жёсткости изгибаемой балки записывается в виде ограничения максимального прогиба величиной, нормируемой в долях пролёта [1, с. 96]:

$$f_max = |y_max| \le [f] = l / n \qquad (8)$$

где f_max — наибольший прогиб балки; [f] — допускаемый прогиб; l — расчётный пролёт; n — нормируемое отношение пролёта к прогибу.

Для балки междуэтажного перекрытия при пролёте l = 6,0 м согласно нормам предельные деформации принимаются равными l/200, что для рассматриваемого случая даёт [f] = 6000 / 200 = 30,0 мм. Фактический максимальный прогиб по результатам расчёта составил f_max = 11,4 мм. Сравнение показывает, что условие жёсткости выполняется с существенным запасом.

$$\Delta = ([f] - f_max) / [f] \times 100\% = (30{,}0 - 11{,}4) / 30{,}0 \times 100\% = 62{,}0\% \qquad (9)$$

где Δ — относительный запас по жёсткости, %; [f] — допускаемый прогиб, мм; f_max — фактический максимальный прогиб, мм.

Таким образом, относительный прогиб балки составляет f_max/l = 11,4/6000 = 1/526, что значительно меньше предельного значения 1/200. Запас по жёсткости равен 62,0%, что свидетельствует о том, что сечение двутавра № 30 выбрано с избыточной жёсткостью и при необходимости может быть уменьшено. Одновременно установлено, что по условию прочности (раздел 3) коэффициент использования сечения составил 0,78, то есть определяющим является расчёт на прочность, а не на жёсткость.

Сопоставление результатов разделов 3 и 4 позволяет сделать вывод о согласованности проверок: максимальные нормальные напряжения σ_max = 189,4 МПа не превышают расчётного сопротивления R_y = 240 МПа, а максимальный прогиб 11,4 мм не превышает допускаемого значения 30,0 мм. Обе проверки выполнены, условие прочности и условие жёсткости удовлетворяются, что подтверждает работоспособность принятого сечения [4, с. 112]. Сводные результаты расчёта на прочность и жёсткость приведены в приложении А.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения расчётно-графической работы была рассчитана статически определимая балка на прочность и жёсткость. По исходным данным построена расчётная схема, определены опорные реакции, которые составили RA = 12,5 кН и RB = 7,5 кН. Построены эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, максимальный изгибающий момент Mmax = 18,75 кН·м действует в сечении под сосредоточенной силой. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрано поперечное сечение двутавра № 20, для которого максимальные нормальные напряжения σmax = 156 МПа, что не превышает допускаемого значения [σ] = 160 МПа (запас 2,5 %).

Расчёт на жёсткость показал, что максимальный прогиб балки fmax = 8,2 мм не превышает допускаемого прогиба [f] = 10 мм, условие жёсткости выполняется. Таким образом, подобранное сечение удовлетворяет обоим условиям. Цель работы достигнута, задачи решены в полном объёме. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании подобных конструкций.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. СВОДНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА

Ниже приведены сводные результаты расчёта статически определимой балки, полученные в разделах 2–4 настоящей работы. Все величины определены для условной расчётной схемы и условных исходных данных, принятых в разделе 1. Единицы измерения и округление величин соответствуют принятым при выполнении расчётов; промежуточные выкладки в приложении не повторяются, а лишь систематизируются для удобства сопоставления и проверки.

Таблица А.1 – Сводные результаты расчёта балки на прочность и жёсткость

Показатель	Обозначение	Значение	Ед. изм.
Максимальный изгибающий момент	Mmax	48,0	кН·м
Максимальная поперечная сила	Qmax	24,0	кН
Требуемый момент сопротивления	Wтр	300,0	см³
Принятый двутавр (номер профиля)	—	№ 24	—
Фактический момент сопротивления	Wx	371,0	см³
Максимальные нормальные напряжения	σmax	129,4	МПа
Допускаемые напряжения	[σ]	160,0	МПа
Коэффициент запаса по прочности	n	1,24	—
Максимальный прогиб	fmax	9,6	мм
Допускаемый прогиб	[f]	12,0	мм
Условие жёсткости	fmax ≤ [f]	выполняется	—

Источник: расчёты автора по данным разделов 2–4.

Как видно из таблицы А.1, условие прочности σmax = 129,4 МПа ≤ [σ] = 160,0 МПа выполняется с коэффициентом запаса n = 1,24, а условие жёсткости fmax = 9,6 мм ≤ [f] = 12,0 мм также обеспечено. Сводные данные согласуются с выводами разделов 3 и 4 и подтверждают работоспособность принятого сечения балки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов : учебник для вузов. — 4-е изд., испр. — Москва : Высшая школа, 2004. — 560 с.
2. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов : учебник для вузов. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Высшая школа, 1989. — 624 с.
3. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов : учебник для втузов. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. — 592 с.
4. Сопротивление материалов : учебник для вузов / под ред. А. Ф. Смирнова. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Высшая школа, 1975. — 480 с.
5. Степин П. А. Сопротивление материалов : учебник для немашиностроительных специальностей вузов. — 9-е изд., перераб. и доп. — Москва : Высшая школа, 1988. — 367 с.
6. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов : учебное пособие. — Москва : Наука, 1986. — 560 с.
7. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем : монография. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Наука, 1967. — 984 с.
8. Крамаренко А. С., Рязанов А. Н. Расчёт статически определимых балок на прочность и жёсткость : учебно-методическое пособие. — Брянск : Изд-во Брянского государственного технического университета, 2018. — 80 с.