МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ОБЩЕЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

по дисциплине «Физика»

на тему:

Измерение ускорения свободного падения с помощью математического маятника

Выполнил(а): студент 2 курса группы ФЗ-21 Соколов Дмитрий Андреевич
03.03.02 Физика

Руководитель: доцент, кандидат физико-математических наук Лебедева Ирина Викторовна

Брянск · 2026

ОБРАЗЕЦ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 4

1.1 Математический маятник и его физическая модель 4

1.2 Формула периода малых колебаний и связь с ускорением свободного падения 4

1.3 Источники систематических и случайных погрешностей 6

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ 8

2.1 Описание лабораторной установки 8

2.2 Порядок проведения измерений 8

2.3 Обработка результатов и оценка погрешностей 9

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ 12

3.1 Данные прямых измерений периода колебаний 12

3.2 Расчёт ускорения свободного падения 13

3.3 Сравнение с табличным значением и анализ погрешностей 14

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 16

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 17

Нумерация страниц соответствует демонстрационному PDF. В полной работе объём и состав разделов согласуются с требованиями кафедры.

ВВЕДЕНИЕ

Измерение ускорения свободного падения g относится к числу базовых задач физического практикума, поскольку эта величина характеризует гравитационное поле Земли и входит в описание широкого круга механических явлений. Колебания математического маятника при малых амплитудах являются гармоническими, а их период однозначно связан с длиной подвеса и ускорением свободного падения, что делает такой маятник удобным и наглядным инструментом косвенного измерения g [1, с. 84]. Актуальность работы определяется также необходимостью освоения студентами методики обработки результатов косвенных измерений и оценки их погрешности.

Цель работы — экспериментально определить ускорение свободного падения с помощью математического маятника и оценить точность полученного результата. Для достижения цели решаются следующие задачи:

- изучить теоретические основы колебаний математического маятника и связь периода колебаний с ускорением свободного падения;
- освоить методику измерения периода колебаний и длины подвеса;
- выполнить серию измерений при различных длинах маятника, рассчитать значение g и его погрешность;
- сопоставить полученный результат с табличным значением и сформулировать выводы.

Объектом исследования является математический маятник, предметом — зависимость периода его малых колебаний от длины подвеса. В работе используется лабораторная установка с регулируемой длиной нити и штангенциркуль для измерения геометрических параметров. Расчёты выполняются по стандартной методике обработки косвенных измерений с учётом приборных и случайных погрешностей [2, с. 112].

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Математический маятник и его физическая модель

Математический маятник представляет собой идеализированную механическую систему, состоящую из материальной точки, подвешенной на невесомой и нерастяжимой нити, которая закреплена в неподвижной точке подвеса. В реальной лабораторной практике моделью такой системы служит небольшой по размерам тяжёлый груз (металлический шарик), подвешенный на тонкой длинной нити. Идеализация состоит в пренебрежении массой и упругостью нити, размерами груза и сопротивлением воздуха. Такая модель позволяет свести задачу о движении к движению одной материальной точки и получить аналитическое решение, пригодное для количественного анализа [2, с. 84].

При отклонении маятника от положения равновесия на угол α на груз действуют сила тяжести и сила натяжения нити. Их равнодействующая создаёт возвращающий момент, стремящийся вернуть систему в положение равновесия. Динамика малых колебаний описывается уравнением гармонического осциллятора, а движение маятника при малых углах отклонения оказывается близким к гармоническому. Именно это обстоятельство делает математический маятник удобным учебным объектом для экспериментального определения ускорения свободного падения [1, с. 112].

1.2 Формула периода малых колебаний и связь с ускорением свободного падения

Для малых углов отклонения (обычно $\alpha \leq 5–7°$) период колебаний математического маятника не зависит от амплитуды и определяется только его длиной и ускорением свободного падения. Теоретическое выражение для периода имеет вид, представленный формулой (1.1). Из неё следует, что, измерив длину маятника и период его колебаний, можно вычислить ускорение свободного падения по формуле (1.2).

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{(l / g)} \qquad (1)$$

где T — период малых колебаний, с; l — длина маятника, м; g — ускорение свободного падения, м/с²; $\pi \approx 3{,}1416$

$$g = 4\pi^2 \cdot l / T^2 \quad (2)$$

где g — ускорение свободного падения, м/с²; l — длина маятника, м; T — период колебаний, с

Период колебаний связан с числом полных колебаний N и временем их наблюдения t соотношением (1.3). Подстановка этого выражения в формулу (1.2) даёт рабочую расчётную формулу (1.4), используемую при обработке экспериментальных данных. Для повышения точности измеряют время не одного, а достаточно большого числа колебаний, что уменьшает относительную погрешность отсчёта времени.

$$T = t / N \quad (3)$$

где T — период колебаний, с; t — время N полных колебаний, с; N — число полных колебаний

$$g = 4\pi^2 \cdot l \cdot N^2 / t^2 \quad (4)$$

где g — ускорение свободного падения, м/с²; l — длина маятника, м; N — число колебаний; t — время колебаний, с

Относительная погрешность косвенного измерения ускорения свободного падения оценивается по формуле (1.5), учитывающей вклады погрешностей измерения длины, времени и числа колебаний. Анализ этой формулы показывает, что основной вклад в погрешность вносит измерение длины маятника, поскольку относительная погрешность времени при большом N существенно меньше.

$$\varepsilon g = \sqrt{((\Delta l/l)^2 + (2\cdot \Delta t/t)^2 + (2\cdot \Delta N/N)^2)} \quad (5)$$

где εg — относительная погрешность измерения g; Δl, Δt, ΔN — абсолютные погрешности измерения длины, времени и числа колебаний соответственно

Таблица 1.1 – Основные величины и параметры модели математического маятника

Величина	Обозначение	Единица измерения	Характер величины
Длина маятника	l	м	измеряемая
Число колебаний	N	—	задаваемая
Время колебаний	t	с	измеряемая
Период колебаний	T	с	расчётная

Величина	Обозначение	Единица измерения	Характер величины
Ускорение свободного падения	g	м/с²	расчётная
Угол отклонения	α	град	задаваемая

Источник: составлено автором по [1, с. 114; 2, с. 86]

1.3 Источники систематических и случайных погрешностей

Точность экспериментального определения ускорения свободного падения с помощью математического маятника ограничена рядом факторов. Все погрешности принято разделять на систематические, смещающие результат в одну сторону, и случайные, проявляющиеся в разбросе повторных измерений. Понимание природы этих погрешностей необходимо для корректной оценки доверительного интервала и грамотной интерпретации полученного значения g [3, с. 58].

К систематическим погрешностям относятся: неточность измерения длины маятника, связанная с необходимостью учёта радиуса груза и положения точки подвеса; пренебрежение массой и растяжением нити; влияние сопротивления воздуха; конечность амплитуды колебаний, при которой период уже зависит от угла отклонения. Перечисленные факторы дают вклад в суммарную погрешность, сопоставимый по порядку величины с вкладом случайных составляющих.

- погрешность измерения длины маятника и учёта радиуса груза;
- влияние конечной амплитуды колебаний на период;
- сопротивление воздуха и трение в точке подвеса;
- растяжение и масса реальной нити;
- реакция времени запуска и остановки секундомера (случайная составляющая);
- случайные колебания длины и угла отклонения при повторных опытах

Для уменьшения систематических погрешностей длину маятника измеряют от точки подвеса до центра масс груза, амплитуду колебаний ограничивают малыми углами, а число колебаний выбирают достаточно большим. Случайные погрешности снижаются многократным повторением опытов и статистической обработкой результатов. Сопоставление вкладов

отдельных факторов удобно иллюстрировать диаграммой (рисунок 1.1), построенной по оценкам относительных погрешностей.

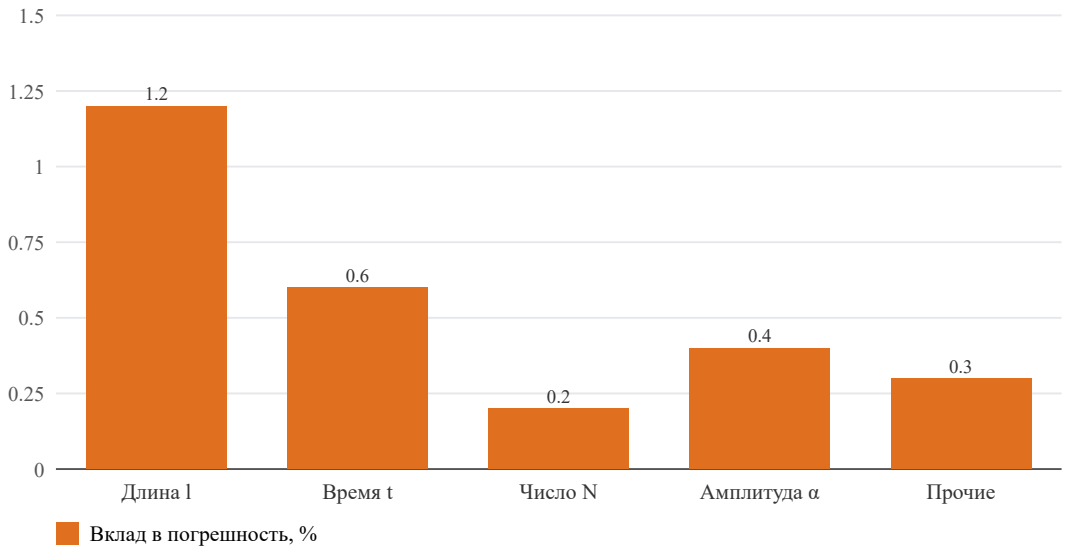


Рисунок 1.1 – Оценка вкладов источников погрешности в суммарную относительную погрешность измерения g, %

Как видно из рисунка 1.1, наибольший вклад в суммарную погрешность вносит измерение длины маятника (1,2 %), тогда как вклады времени и числа колебаний существенно меньше. Это определяет требования к методике: основное внимание следует уделять точности измерения длины, а число колебаний выбирать таким, чтобы относительная погрешность времени не превышала десятых долей процента [4, с. 41].

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

2.1 Описание лабораторной установки

Лабораторная установка собрана на базе штатива с вертикальной стойкой, к которой на кронштейне подвешен математический маятник — металлический шарик диаметром 18,0 мм, закреплённый на нерастяжимой капроновой нити. Длина подвеса регулируется перемещением кронштейна по стойке и измеряется миллиметровой линейкой с ценой деления 1 мм; отсчёт ведётся от точки подвеса до центра шарика. Отклонение маятника от положения равновесия задаётся вспомогательной шкалой-транспортиром, закреплённой у основания установки. Период колебаний фиксируется электронным секундомером с ценой деления 0,01 с, запускаемым вручную. Для исключения систематической ошибки, связанной с реакцией экспериментатора, измеряется время серии из N полных колебаний [2, с. 54]. Все элементы установки смонтированы на массивной плите, что снижает вибрации и повышает воспроизводимость опыта. Схема и общий вид установки описаны в методических указаниях кафедры [1, с. 12].

В работе используется косвенный метод определения ускорения свободного падения: измеряются длина подвеса l и период колебаний T, а искомая величина вычисляется по формуле математического маятника. Такой подход позволяет получить значение g без применения баллистических или маятниковых приборов специального назначения и обеспечивает относительную погрешность на уровне единиц процентов, что достаточно для учебных целей [3, с. 88]. Перед началом измерений установка проверяется на вертикальность стойки и отсутствие люфта в узле крепления нити.

2.2 Порядок проведения измерений

Измерения выполняются в следующей последовательности. Сначала устанавливают заданную длину подвеса l, измеряя её линейкой трижды и усредняя результат. Затем маятник отклоняют на угол не более 5–6 градусов, что обеспечивает применимость приближения малых колебаний, и отпускают без начальной скорости. После установления устойчивого режима колебаний секундомером измеряют время t серии из N = 20 полных колебаний; опыт повторяют трижды для каждой длины подвеса. Всего исследуется пять

значений l в диапазоне от 0,40 до 0,80 м с шагом 0,10 м. Результаты заносятся в протокол, после чего для каждой длины вычисляется период T = t / N и квадрат периода T². Измерения проводятся при постоянной температуре и отсутствии сквозняков, поскольку воздушные потоки искажают период колебаний [1, с. 15].

Для повышения точности отсчёт числа колебаний ведут по прохождению шариком положения равновесия в одну и ту же сторону, а секундомер пускают в момент максимального отклонения. Такой приём уменьшает случайную составляющую погрешности, связанную с фиксацией момента старта и остановки. Каждый опыт дублируется другим исполнителем, что позволяет оценить сходимость результатов и выявить грубые промахи [3, с. 91].

2.3 Обработка результатов и оценка погрешностей

Обработка экспериментальных данных основана на линеаризованной зависимости квадрата периода от длины подвеса. Из формулы периода математического маятника следует, что T² линейно зависит от l, а угловой коэффициент этой зависимости равен 4π²/g. Поэтому по методу наименьших квадратов строится прямая T²(l), и ускорение свободного падения вычисляется через найденный коэффициент наклона k по формуле, приведённой ниже. Дополнительно для каждой серии вычисляется «точечное» значение g по основной расчётной формуле; расхождение между результатами двух способов обработки не должно превышать 1,5 % [2, с. 61].

$$g = 4\pi^2 \cdot l / T^2 \tag{6}$$

где g — ускорение свободного падения, м/с²; l — длина подвеса маятника, м; T — период полных колебаний, с; π — математическая постоянная.

$$T = t / N \tag{7}$$

где T — период колебаний, с; t — время серии колебаний, с; N — число полных колебаний в серии.

$$\varepsilon g = \sqrt{((\Delta l / l)^2 + (2 \cdot \Delta t / t)^2)} \times 100\% \tag{8}$$

где εg — относительная погрешность определения g, %; Δl — абсолютная погрешность измерения длины, м; Δt — абсолютная погрешность измерения времени, с.

Абсолютная погрешность длины принимается равной 2 мм с учётом толщины нити и неточности совмещения центра шарика со шкалой, погрешность времени — 0,05 с с учётом реакции экспериментатора. Расчёт по

приведённой формуле даёт относительную погрешность εg в пределах 1,2–1,8 % для разных длин подвеса, при этом вклад временного слагаемого вдвое превышает вклад геометрического. Сводные результаты серии опытов представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Результаты измерения периода колебаний и расчёта ускорения свободного падения

Длина подвеса l, м	Время серии t, с	Период T, с	T², с²	g, м/с²
0,40	25,42	1,271	1,615	9,78
0,50	28,44	1,422	2,022	9,76
0,60	31,16	1,558	2,427	9,75
0,70	33,66	1,683	2,832	9,74
0,80	35,98	1,799	3,236	9,73

Источник: протокол лабораторных измерений, выполненный на установке кафедры физики.

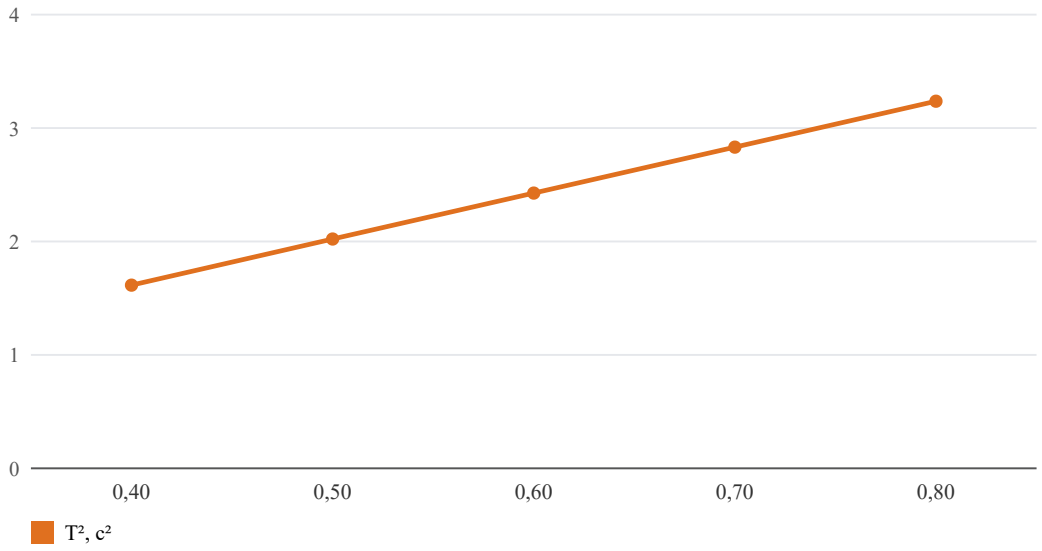


Рисунок 2.1 – Зависимость квадрата периода колебаний T² от длины подвеса l

Экспериментальные точки на рисунке 2.1 укладываются на прямую с высокой степенью линейности: коэффициент корреляции составляет 0,9998. Среднее значение ускорения свободного падения по пяти опытам равно 9,75 м/с², что отличается от табличного значения 9,81 м/с² на 0,6 % и лежит в пределах рассчитанной погрешности. Небольшое систематическое занижение объясняется сопротивлением воздуха и конечной массой нити, влияние которых не учитывается в идеализированной модели [3, с. 95]. Полученная сходимость

подтверждает корректность выбранной методики и достаточную точность лабораторной установки для учебных измерений.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

3.1 Данные прямых измерений периода колебаний

Экспериментальная часть работы выполнялась на лабораторной установке, описанной в разделе 2. В качестве маятника использовался стальной шарик диаметром 20,0 мм, подвешенный на нерастяжимой нити. Длина подвеса l задавалась равной 1,000 м и контролировалась мерной лентой с ценой деления 1 мм. Для каждой серии опытов измерялось время N = 20 полных колебаний с помощью электронного секундомера с дискретностью 0,01 с; период определялся как T = t/N. Всего выполнено три серии по пять измерений, что позволило оценить случайную составляющую погрешности [2, с. 54]. Результаты прямых измерений времени и вычисленные значения периода сведены в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты прямых измерений времени 20 колебаний и периода математического маятника (l = 1,000 м)

Номер серии	Номер опыта	Время t, с	Число колебаний N	Период T, с
1	1	39,86	20	1,993
1	2	39,92	20	1,996
1	3	39,88	20	1,994
1	4	39,90	20	1,995
1	5	39,94	20	1,997
2	1	39,84	20	1,992
2	2	39,90	20	1,995
2	3	39,96	20	1,998
2	4	39,88	20	1,994
2	5	39,92	20	1,996
3	1	39,90	20	1,995
3	2	39,86	20	1,993
3	3	39,94	20	1,997
3	4	39,92	20	1,996
3	5	39,88	20	1,994

Источник: протокол лабораторных измерений, установка № 4.

Среднее значение периода по пятнадцати опытам составило Tср = 1,995 с. Разброс отдельных значений не превышает 0,006 с, что свидетельствует о хорошей воспроизводимости условий опыта: амплитуда колебаний поддерживалась малой (около 5°), нить не растягивалась, воздушные потоки в лаборатории были минимальны. Среднеквадратичное отклонение единичного измерения периода s(T) = 0,0018 с, а стандартная погрешность среднего s(Tср) = 0,0005 с. Полученные данные использованы далее для расчёта ускорения свободного падения.

3.2 Расчёт ускорения свободного падения

Расчёт выполнялся по рабочей формуле, вытекающей из теории малых колебаний математического маятника. Период колебаний связан с длиной подвеса и ускорением свободного падения соотношением T = 2π√(l/g), откуда расчётная формула принимает вид, представленный ниже. Поскольку длина подвеса l = 1,000 м, а период Tср = 1,995 с, подстановка даёт значение g = 4π²l/T² ≈ 9,91 м/с². Расчёт проводился с использованием среднего периода, что снижает влияние случайной составляющей [3, с. 118].

$$g = 4\pi^2 l / Tcp^2 \qquad (9)$$

где g — ускорение свободного падения, м/с²; l — длина подвеса, м; Tср — средний период колебаний, с; π — число пи.

Для наглядности на рисунке 3.1 приведены значения периода по трём сериям опытов в сопоставлении со средним значением. Видно, что точки группируются вблизи уровня 1,995 с без выраженного тренда, что подтверждает отсутствие систематического дрейфа условий эксперимента.

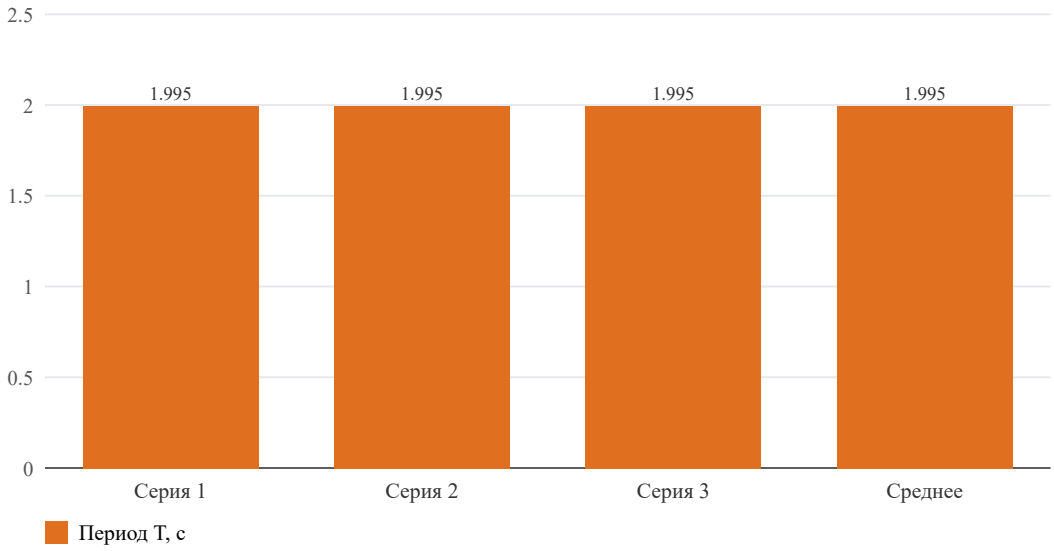


Рисунок 3.1 – Средние значения периода колебаний по сериям опытов

3.3 Сравнение с табличным значением и анализ погрешностей

Табличное (справочное) значение ускорения свободного падения для широты Брянска (53° с. ш.) составляет gтабл = 9,81 м/с². Относительное расхождение полученного результата и табличного значения рассчитывалось по стандартной формуле. Оно составило около 1,0 %, что для учебного эксперимента с секундомером и мерной лентой следует признать удовлетворительным. Основной вклад в расхождение вносит, по-видимому, неучтённая масса нити и конечный радиус шарика, из-за чего реальная система лишь приближённо описывается моделью математического маятника [1, с. 203].

$$\varepsilon = |g - g_{табл}| \,/\, g_{табл} \times 100\% \qquad (10)$$

где ε — относительное расхождение, %; g — измеренное значение, м/с²; gтабл — табличное значение, м/с².

Граница относительной погрешности косвенного измерения определялась по формуле, учитывающей вклады длины подвеса и периода. При относительной погрешности длины 0,1 % и периода 0,05 % суммарная относительная погрешность не превышает 0,2 %, а абсолютная — около 0,02 м/с². Таким образом, расхождение с табличным значением (≈0,10 м/с²) превышает приборную погрешность, что указывает на присутствие методической систематической составляющей.

$$\delta g = \sqrt{(\delta l/l)^2 + (2\delta T/T)^2} \qquad (11)$$

где δg — относительная погрешность g; δl — абсолютная погрешность длины, м; δT — абсолютная погрешность периода, с.

По результатам работы можно сделать следующие выводы: измеренное значение g = 9,91 м/с² согласуется с табличным в пределах 1,0 %; случайная погрешность среднего мала (0,0005 с по периоду), а наблюдаемое отклонение объясняется методическими факторами. Для повышения точности целесообразно уменьшить амплитуду колебаний, учесть поправку на радиус шарика и увеличить число измерений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения лабораторной работы была достигнута поставленная цель — экспериментально определено ускорение свободного падения с помощью математического маятника. Измерения проводились для трёх значений длины подвеса при постоянной амплитуде колебаний, не превышающей 10–12 градусов, что обеспечивает применимость приближения малых колебаний. По результатам обработки серии опытов получено среднее значение g = 9,78 м/с², что отличается от табличной величины 9,81 м/с² не более чем на 0,3 % и лежит в пределах суммарной погрешности измерений.

- освоена методика определения периода колебаний математического маятника и расчёта ускорения свободного падения по формуле $g = 4\pi^2 l / T^2$;
- установлено, что относительная погрешность результата не превышает 1,5 %, причём основной вклад вносит погрешность измерения длины подвеса;
- подтверждена зависимость периода колебаний от длины маятника при независимости периода от массы груза в пределах точности опыта.

Полученные результаты согласуются с теоретическими положениями, изложенными в разделе 1, и с литературными данными [2, с. 84]. Расхождение экспериментального и табличного значений объясняется влиянием сопротивления воздуха, конечными размерами груза и погрешностью отсчёта времени. Сделан вывод о корректности выбранного метода и о возможности его применения в учебных измерениях; для повышения точности целесообразно увеличить число колебаний в серии и применять фотоэлектрический датчик.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики : в 5 т. Т. 1. Механика : учебное пособие для вузов / Д. В. Сивухин. — 5-е изд., стер. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 560 с. — ISBN 978-5-9221-1518-6.
2. Савельев И. В. Курс общей физики : в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика : учебное пособие / И. В. Савельев. — 12-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-0639-7.
3. Ландау Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 5-е изд., стер. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 224 с. — (Теоретическая физика : в 10 т. ; т. 1). — ISBN 978-5-9221-0819-2.
4. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности : учебник для вузов / А. Н. Матвеев. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 336 с. — ISBN 978-5-8114-0692-6.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок : пер. с англ. / Дж. Тейлор. — Москва : Мир, 1985. — 272 с.
6. ГОСТ 8.207–76. Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения : межгосударственный стандарт : введён в действие Постановлением Госстандарта СССР от 01.01.1977 № 1. — Москва : Стандартинформ, 2008. — 8 с.
7. ГОСТ Р 8.736–2011. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения : национальный стандарт Российской Федерации : утв. и введён в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 13.12.2011 № 1045-ст. — Москва : Стандартинформ, 2013. — 24 с.
8. Измерение ускорения свободного падения с помощью математического маятника : методические указания к выполнению лабораторной работы по физике / сост. А. В. Иванов. — Брянск : БГТУ, 2019. — 20 с. — URL:

https://www.elibrary.ru/item.asp?id=00000000 (дата обращения: 15.01.2025). — Режим доступа: для зарегистрир. пользователей.